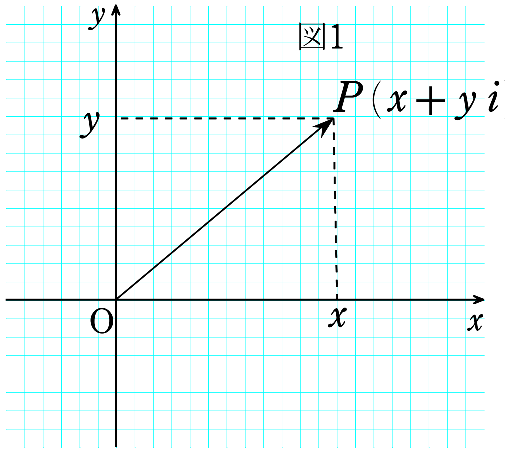
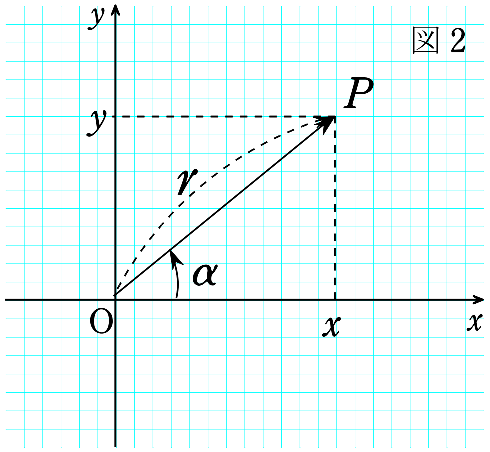
$\tan\dfrac{\theta}{2}$ と複素数平面の関係





複素数平面については，これまでの「山脇の超数学」でも登場しましたが，ここで再度確認しておきましょう。複素数 $z=x+yi$ を座標平面上の点 $P(x, y)$ で表すとき，この平面を **複素数平面** という。 また，複素数平面上で $z=x+yi$ を表す点 P を $P(z)$，$P(x+yi)$，または単に 点 z と表す。（図1） 次に，$OP=r$，半直線 OP の x 軸（実軸）とのなす角（x 軸からの回転角，反時計回りを＋，時計回りを－とする）を α とすると，
図２のように，$x=r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$ であるから，

$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ $(r>0)$ と書くことができ，これを z の **極形式** という。
r を z の絶対値といい，$r=|z|$ と表す。$r=\sqrt{x^2+y^2}$ ……① である。

α を z の偏角といい，$\alpha=\arg z$ で表す。$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$ …②が成り立つ。$(x\neq0)$

ここで z の２乗を考える。$z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$ ……③ $(\because i^2=-1)$
一方，「ド･モアブルの定理」より，$z^2=r^2(\cos2\alpha+i\sin2\alpha)$ ……④
④，③ の実部と虚部は等しいことから，

$$r^2\cos2\alpha=x^2-y^2 \Rightarrow \cos2\alpha=\frac{x^2-y^2}{r^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad……⑤\quad(\because ①)$$

$$r^2\sin2\alpha=2xy \Rightarrow \sin2\alpha=\frac{2xy}{r^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}\quad……⑥\quad(\because ①)$$

コメント この関係については「山脇の超数学講座 No.17～黄金比φとは第８回～」でも登場しています。

山脇の超数学講座 No. 47

さらに，⑤，⑥の分母，分子を $x^2(\neq0)$ で割ると，

$$\cos2\alpha=\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha},\quad \sin2\alpha=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\quad(\because ②)$$

ここで，$\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ とすれば，$2\alpha=\theta$ となり，さらに $\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくことによって，

$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$ $(\theta\neq(2n-1)\pi)$ となり，「ヘルパーの公式」は複素数平面からも導かれることになる。何しろ tanα は複素数の位置を決定する偏角と密接な関係にあるから，ヘルパーになることができるわけである。

ヘルパー $\tan\dfrac{\theta}{2}$ は，次のような問題でも活躍する。

例題 (1) $\dfrac{1+z}{1-z}=\cos\theta+i\sin\theta$ が成り立つとき，$z=i\tan\dfrac{\theta}{2}$ と表されることを示せ。

(2) 方程式 $(z+1)^7+(z-1)^7=0$ を解け。

(1) **証明** $\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくと，与えられた方程式は，次のようになる。

$$-1+\frac{2}{1-z}=\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2ti}{1+t^2} \iff \frac{2}{1-z}=\frac{2}{1+t^2}+\frac{2ti}{1+t^2}$$

$$\iff 1+t^2=(1-z)(1+ti) \iff 1-z=\frac{1+t^2}{1+ti}=\frac{(1+t^2)(1-ti)}{(1+ti)(1-ti)}=1-ti$$

よって，$z=ti=i\tan\dfrac{\theta}{2}$ 終

(2) **解答** $(z+1)^7+(z-1)^7=0$ より，$(1+z)^7=(1-z)^7$

$z=1$ とすると，左辺$=2^7$，右辺$=0$ で矛盾する。よって，$z\neq1$

$\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^7=1$，ゆえに，$\dfrac{1+z}{1-z}=\cos\dfrac{2k\pi}{7}+i\sin\dfrac{2k\pi}{7}$ $(k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

よって，(1) で証明したことより，$z=i\tan\dfrac{k\pi}{7}$ $(k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ だから，$z=0,\ \pm i\tan\dfrac{\pi}{7},\ \pm i\tan\dfrac{2\pi}{7},\ \pm i\tan\dfrac{3\pi}{7}$ 答